**דרישות המטלה:**

לתכנן אלגוריתם אשר מקבל מערך של מספרים באורך n ומספר k, ויוצר רשימה של k האיברים הקטנים ביותר במערך בסדר עולה.

לשם פיתרון האלגוריתם, נדרשות שלוש נקודות בדיקה n1,n2,n3. על האלגוריתם לעבור על המערך במעבר אחד ולהדפיס את k האיברים הקטנים ביותר שבחן עד לנקודות הבדיקה הנ"ל במערך.

האלגוריתם שומר בכל רגע נתון רק את k האיברים הקטנים ביותר (לכל היותר) שבחן עד כה. כלומר, סיבוכיות המקום של האלגוריתם היא O(k).

לשם כך נדרש במטלה לתכנן מבנה נתונים המוגבל ל-k איברים ותומך בפעולות אשר מפורטות בחוברת המטלות של ממ"ן 16 בעמוד 14.

**תיאור הפרויקט**

קובץ זה מצורף יחד עם תוכנית המכילה את הקוד המתאים.

הבעיה המוצגת בממ"ן 16 הינה מציאת k האיברים הקטנים ביותר במערך בגודל n בסדר עולה.

לצורך פיתרון בעיה זו, השתמשנו במבנה הנתונים עץ אדום-שחר כאשר ישנה הגבלה על גודל העץ (גודל k).

רוב השגרות מבוססות על-פי האלגוריתמים המוכחים בספר, לכן שגרות אלו לא נוכיח ורק נצרף את העמודים המתאימים.

השגרות שאינן מופיעות בספר נוכיח את נכונותן כולל סיבוכיות זמן ריצה וסיבוכיות מקום.

השתמשנו במחלקות גנריות למען פשטות הקוד ובכדי שתהיה אפשרות לעבוד עם כל סוג משתנה.

את התוכנית החלטנו לממש בשפת Java.

**המחלקה RedBlackNode**

המחלקה מייצגת צומת אחד בעץ אדום-שחור.

**משתני המחלקה:**

* BLACK=0, קבוע המייצג את הצבע שחור.
* RED=1, קבוע המייצג את הצבע אדום.
* key, המייצג את הערך המספרי של הצומת.
* color, המייצג את הצבע הנוכחי של הצומת.
* parent, המכיל מצביע לאבא של הצומת.
* left, המכיל מצביע לבן השמאלי של הצומת.
* right, המכיל מצביע לבן הימני של הצומת.

**שגרות המחלקה:**

* **public RedBlackNode():**

בנאי המחלקה, שיוצר צומת חדש ומאפס את הערכים (צבע ברירת המחדל של צומת חדש הוא שחור).

* **public RedBlackNode(T key):**

בנאי המחלקה, אשר מקבל ערך למפתח, קורא לבנאי הראשי ולאחר מכן מכניס את המפתח לצומת החדש.

**נכונות השגרות:**

מכיוון שהשגרות היחידות במחלקה הינן הבנאים, והפעולות היחידות שמתבצעות בבנאי אלו פעולות השמה פשוטות למשתני המחלקה, השגרות אכן מבצעות את הדרוש עליהן בסיבוכיות O(1).

**המחלקה RedBlackTree**

המחלקה מייצגת שורש של עץ אדום-שחור.

**משתני המחלקה:**

* nil, משתנה מסוג RedBlackNode שמייצג nil.
* root, משתנה מסוג RedBlackNode שמאותחל ל-nil ומייצג את שורש העץ.
* k, משתנה המייצג את הגודל של העץ. משתנה זה נבחר על-ידי המשתמש.
* currSize, משתנה אשר שומר את מספר האיברים הנוכחי שנמצא בעץ.

**שגרות המחלקה:**

* **public RedBlackTree(int k):**

בנאי המחלקה, שיוצר עץ חדש המאותחל ל-nil ומקבל את גודל העץ k מהמשתמש.

* **private Boolean isNil(RedBlackNode node):**

שגרה פרטית המקבלת צומת של עץ אדום-שחור ומחזירה אמת אם הצומת אכן nil ואחרת מחזירה שקר.

* **private void leftRotate(RedBlackNode<T> x):**

שגרה פרטית המקבלת צומת x בעץ אדום-שחור ומבצעת סיבוב שמאלי על x. אנו מניחים כי הבן הימני שלו y אינו nil. "ציר" הסיבוב השמאלי הוא הקשר מ-x ל-y.

* **private void rightRotate(RedBlackNode<T> x):**

שגרה פרטית המקבלת צומת x בעץ אדום-שחור ומבצעת סיבוב ימני על x. השגרה עובדת באופן סימטרי לשגרה של הסיבוב השמאלי, וגם כן אנו מניחים כי הבן השמאלי של x אינו nil.

* **public RedBlackNode<T> TreeMinumum(RedBlackNode<T> x):**

שגרה ציבורית המקבלת צומת בעץ אדום-שחור ובודקת החל מצומת זה מי האיבר בעל המפתח המינימלי, ומחזירה את המצביע לצומת הזה. כאשר השגרה מופעלת על שורש העץ, האיבר שמוחזר הינה האיבר בעל הערך המינימלי בכל העץ.

* **public RedBlackNode<T> TreeMaximum(RedBlackNode<T> x):**

שגרה ציבורית המקבלת צומת בעץ אדום-שחור ובודקת החל מצומת זה מי האיבר בעל המפתח המקסימלי, ומחזירה את המצביע לצומת הזה. כאשר השגרה מופעלת על שורש העץ, האיבר שמוחזר הינה האיבר בעל הערך המקסימלי בכל העץ.

* **public RedBlackNode<T> TreeSuccessor(RedBlackNode<T> x):**

שגרה ציבורית המקבלת צומת בעץ אדום-שחור. השגרה מחזירה את העוקב לצומת x בעץ אם קיים כזה, ו-nil אם x הוא בעל המפתח הגדול ביותר בעץ.

* **public void Insert(T key):**

שגרה ציבורית ומשמשת לגישור נוח בין צד המשתמש לשיטות הפרטיות בעזרת העמסה.

השגרה מקבלת ערך להוסיף לעץ. במידה והעץ אינו גדול מידי, היא קוראת לשיטה פרטית אשר מוסיפה צומת בעל ערך זה. אחרת, השגרה בודקת האם האיבר בעל הערך המקסימלי ביותר בעץ גדול מהערך אותו אנו רוצים להוסיף. אם כן – השגרה מוחקת את האיבר המקסימלי בעץ ומוסיפה את צומת חדש לעץ בעל הערך key המבוקשת. אחרת – השגרה יוצאת מבלי לעשות דבר.

* **private void Insert(RedBlackNode<T> z):**

שגרה פרטית אשר נקראת מתוך השגרה הציבורית insert. שגרה זו מבצעת הוספה של צומת חדש לעץ אדום-שחור, ומעדכנת בהתאם את הערכים numLeft, numRight. במידה ויש הפרה בחוקיות העץ, מתבצעת קריאה לשיטה אשר אחראית לתיקון הצבעים.

* **private void InsertFixup(RedBlackNode<T> z):**

שגרה פרטית אשר נקראת מתוך השגרה הפרטית insert. השגרה מתקנת הפרות בצבעים של העץ בעזרת השגרות leftRotate, rightRotate שיתכן וקרו לאחר הוספת הצומת z לעץ.

* **private void Remove(RedBlackNode<T> z):**

שגרה פרטית אשר נקראת מתוך השיטה הציבורית insert. השגרה מקבלת את הצומת בעל הערך המקסימלי בעץ, מוחקת אותו ומעדכנת את הנתונים של numLeft, numRight בעזרת שגרת עזר. במידה ויש הפרה בחוקיות העץ, מתבצעת קריאה לשיטה אשר אחראית לתיקון הצבעים.

* **private void RemoveFixup(RedBlackNode<T> x):**

שגרה פרטית אשר נקראת מתוך השגרה הפרטית remove. השגרה מתקנת הפרות בצבעים של העץ בעזרת השגרות rightRotate, leftRotate שיתכן וקרו לאחר מחיקת הצומת x מהעץ.

* **public void printkMin():**

שגרה ציבורית ומשמשת לגישור נוח בין צד המשתמש לשיטות הפרטיות בעזרת העמסה.

השגרה יוצרת מצביע חדש לשורש וקוראת לשגרה הפרטית printkMin.

* **private void printkMin(RedBlackNode<T> x):**

שגרה פרטית הנקראת מתוך השיטה הציבורית printkMin. השגרה מקבלת את צומת העץ ומדפיסה את כל האיברים שבו. העץ מוגבל ל-k איברים לכן מודפסים k איברים של העץ.

**נכונות השגרות:**

* **public RedBlackTree(int k):**

מכיוון שהפעולות היחידות שמתבצעות בבנאי אלו פעולות השמה פשוטות למשתני המחלקה, השגר אכן מבצעת את הדרוש עליה בסיבוכיות O(1).

* **private Boolean isNil(RedBlackNode node):**

מכך ששגרה זו מחזירה ערך של אמת או שקר בהתאם לנכונות התנאי return node == nil, השגרה מבצעת את הדרוש ונכונה, וכמו כן זמן הריצה שלה הוא O(1).

* **private void leftRotate(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של LEFT-ROTATE אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 234, לכן השגרה מבצעת את הדרוש. בנוסף, על פי עמוד 234 בספר זמן הריצה של השגרה הוא O(1).

* **private void rightRotate(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של LEFT-ROTATE אשר ממומש ומוכח במדריך הלמידה בעמוד 187, לכן השגרה מבצעת את הדרוש. בנוסף, על פי עמוד 234 בספר זמן הריצה של השגרה הוא O(1).

* **public RedBlackNode<T> TreeMinumum(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של TREE-MINUMUM אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 217. מכיוון שעץ אדום-שחור הינו עץ חיפוש בינארי מבסיסו,

השגרה הנ"ל שממומשת עבור עץ חיפוש בינארי מבצעת את הדרוש גם בעבור עץ אדום-שחור. בנוסף, על פי עמוד 217 בספר, זמן הריצה של השגרה על עץ בגובה h הוא O(h). מכיוון שהעץ מכיל k איברים לכל היותר, על-פי עמוד 213 פסקה שלישית, גובה עץ אדום-שחור בעל n צמתים הינו logn, לכן זמן הריצה במקרה הגרוע ביותר של השגרה הוא O(logk).

* **public RedBlackNode<T> TreeMaximum(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של TREE-MINUMUM אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 217. מכיוון שעץ אדום-שחור הינו עץ חיפוש בינארי מבסיסו, השגרה הנ"ל שממומשת עבור עץ חיפוש בינארי, מבצעת את הדרוש גם בעבור עץ אדום-שחור. בדומה לשגרה TREE-MINIMUM, זמן הריצה של השגרה הזו גם הוא O(logk), כאשר k גודל המקסימלי של העץ.

* **public RedBlackNode<T> TreeSuccessor(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של TREE-SUCCESSOR אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 218. מכיוון שעץ אדום-שחור הינו עץ חיפוש בינארי מבסיסיו, השגרה הנ"ל שממומשת עבור עץ חיפוש בינארי, מבצעת את הדרוש גם בעבור עץ אדום-שחור. על-פי עמוד 218 זמן הריצה של השגרה הינו O(h) כאשר h מייצג את גובה העץ. לפי עמוד 213 פסקה שלישית, גובה עץ אדום-שחור הינו logn כאשר n הוא מספר האיברים בעץ. מכך נובע כי עבור עץ אדום-שחור בעל k איברים, זמן הריצה של השגרה במקרה הגרוע ביותר הוא O(logk).

* **public void insert(T key):**

הוכחת נכונות: השגרה יוצרת צומת חדש בשם z עם המפתח key שהיא מקבלת מהמשתמש, צומת בשם max שמצביע לשורש העץ (בהמשך יצביע לצומת עם המפתח המקסימלי בעץ).

בשורה 3 מתבצעת בדיקה האם העץ מכיל k איברים (המשתנה currSize מכיל את כמות איברים שיש כרגע בעץ).

במידה העץ עדיין לא מכיל k איברים, השגרה נכנסת לelse, קוראת לשגרה Insert(RedBlackNode<T> z) עם הצומת החדש z ומגדילה את currSize, המייצג את המצב הנוכחי של העץ מבחינת גודלו. השגרה הנ"ל נכונה מכך שהיא מבוצעת על בסיס הפסאודוקוד של הוספה לעץ אדום-שחור בספר (הסבר מלא בפסקה למטה). אחרת, אם העץ מלא (כלומר currSize = k), השגרה קוראת לשגרה TreeMaximum שהראינו כי נכונה, אשר מחזירה מצביע לאיבר המקסימלי ומכניסה אותו למשתנה max. לאחר מכן מתבצעת בדיקה, האם המפתח הנמצא בצומת z קטן מהמפתח בצומת max, כלומר האם האיבר אותו אנו רוצים להוסיף קטן מהאיבר המקסימלי בעץ. במידה וכן נעשית קריאה לשגרה Remove עם המשתנה max, שמבצעת מחיקה למקסימום. השגרה Remove(RedBlackNode<T> z) נכונה מכך שהיא מבוצעת על בסיס הפסאודוקוד של מחיקה לעץ אדום-שחור בספר (הסבר מלא בפסקאות הבאות). מצב העץ לאחר מחיקת המקסימום הוא עץ אדום-שחור בעל k-1 איברים כאשר המקסימום התחלף בהתאם לתיקון הצבעים של שגרת התיקון. לאחר מכן יש קריאה לשגרה Insert(RedBlackNode<T> z) אשר מוסיפה את הצומת המבוקש z לעץ, אשר נכונותה מוסבר בפסקה הבאה. במידה והעץ מכיל k איברים (מלא לחלוטין), אך המקסימום הנוכחי בעץ קטן יותר מהצומת שאנחנו מעוניינים להכניס, השגרה מסתיימת מבלי לעשות דבר. לא מתבצע עידכון של המשתנה currSize, מכיוון שישר לאחר המחיקה, מתבצעת הוספה, לכן לאחר שתי הקריאות לשגרת המחיקה ולשגרת ההוספה, העץ מכיל k איברים בשנית, לכן אין צורך לעדכן את currSize, שברגע שהעץ מכיל k איברים, נשאר זהה על פי הגדרת השגרה kSmallest במחלקה הראשית ועל פי דרישות המטלה.

אי לכך, השגרה בודקת האם העץ מכיל k איברים, במידה ולא היא מוסיפה את הצומת המבוקש לעץ, ובמידה וכן, היא בודקת האם האיבר המקסימלי גדול מהאיבר שאותו אנו רוצים להוסיף לעץ. אם כן, השגרה מוחקת את האיבר המקסימלי בעץ ומוסיפה את האיבר הרצוי. אחרת השגרה לא מבצעת דבר (העץ נשאר כמו שהוא) והשגרה מסתיימת. מכאן ניתן להסיק כי בסיום השגרה העץ מכיל k איברים, במידה והאיבר שאנו מעוניינים להכניס קטן מהמקסימום, המקסימום הישן נמחק ומוחלף במקסימום עדכני על פי השינויים בפונקציית התיקון. אי לכך, השגרה מבצעת את הדרוש על פי תנאי המטלה.

סיבוכיות זמן ריצה: פעולות השמה פשוטות ומשפטי תנאי (if else) לוקחות זמן קבוע של O(1).

מהאמור בפסקאות הבאות, מכך שפונקציית ההכנסה, המחיקה ומציאת המקסימום מבוססות על פי הפסאודוקוד בספר, כאשר מדובר בעץ אדום-שחור המכיל k איברים לכל היותר, סיבוכיות זמן הריצה של שגרת המחיקה ושגרת ההוספה לוקחות O(logk). אי לכך, זמן הריצה שלוקח לפונקציה הינו O(logk).

סיבוכיות מקום: מכך אף משתנה אינו תלוי בגודל הקלט, סיבוכיות המקום הינה O(1).

* **private void Insert(RedBlackNode<T> z):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של RB-INSERT אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 236, לכן השגרה מבצעת את הדרוש ונכונה. על פי עמוד 241 בספר, זמן הריצה של השגרה בעץ אדום-שחור המכיל k איברים הינו O(logk).

* **private void InsertFixup(RedBlackNode<T> z):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של RB-INSERT-FIXUP אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 236, לכן השגרה מבצעת את הדרוש ונכונה. על פי עמוד 241 בספר, זמן הריצה של השגרה בעץ אדום-שחור המכיל k איברים הינו O(logk).

* **private void Remove(RedBlackNode<T> z):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של RB-DELETE אשר ממומש ומוכח בספר בעמוד 242, לכן השגרה מבצעת את הדרוש ונכונה. על פי עמוד 246 בספר, זמן הריצה של השגרה בעץ אדום-שחור המכיל k איברים הינו O(logk).

* **private void RemoveFixup(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של RB-DELETE-FIXUP, אשר ממומש ומוכח בעמוד 243, לכן השגרה מבצע את הדרוש ונכונה. על פי עמוד 246 בספר, זמן הריצה של השגרה בעץ אדום-שחור המכיל k איברים הינו O(logk).

* **public void printkMin():**

שגרה זו קוראת לשגרה הפרטית printkMin ושולחת אליה את מצביע לשורש העץ.

בהנחה והאלגוריתם השגרה הפרטית printkMin (ראו הסבר למטה), גם השגרה הנ"ל נכונה. זמן הריצה של השגרה הנ"ל הוא זמן הריצה של השגרה הפרטית printkMin.

* **private void printkMin(RedBlackNode<T> x):**

האלגוריתם לשגרה זו מבוסס על הפסאודוקוד של INORDER-TREE-WALK אשר ממומש ומוכח בספר בעמודים 214-215. השגרה מדפיסה בסדר ממוין את כל המפתחות של עץ חיפוש בינארי נתון. מכיוון שעץ אדום-שחור הינו עץ חיפוש בינארי מבסיסיו, השגרה הנ"ל מבצעת את הדרוש גם בעבור עץ אדום-שחור. על-פי עמוד 214, השגרה מתבצעת בזמן ריצה O(n) כאשר n מספר האיברים בעץ. מכיוון שבעץ אדום-שחור הנ"ל יש הגבלה עבור k איברים, זמן הריצה הינו O(k) במקרה הגרוע ביותר.

**המחלקה Main**

המחלקה הראשית.

**משתני המחלקה:**

* MIN=0, קבוע המייצג את המספר המינימלי שיכיל מערך מספרי (על פי הגדרת המטלה).
* MAX=1023, קבוע המייצג את המספר המקסימלי שיכיל מערך מספרי (על פי הגדרת המטלה).

**שגרות המחלקה:**

* **public static void main(String arg[]):**

השגרה הראשית, בה מוגדרים המערכים A,B,C כפי שהוגדרו במטלה.

* **public static void fillArray(int [] array):**

שגרה אשר מקבלת מערך ריק וממלאה אותו במספרים רנדומלים בטווח בין MIN לבין MAX.

* **public static void kSmallest(int [] array, int k):**

שגרה המקבלת מערך מלא במספרים טבעיים בטווח 0-1023 ומספר k. השגרה מציגה רשימה של k האיברים הקטנים ביותר במערך בסדר עולה. האלגוריתם מתוכנן לפי התכנון המוצג במטלה (עמוד 14 בחוברת המטלות).

**נכונות השגרות:**

* **public static void main(String arg[]):**

זוהי השגרה הראשית, אשר מייצרת שלושה מערכים A,B,C באורכים 200,400,800 בהתאמה, כפי שנדרש בשאלה. נעשית קריאה לשגרה fillArray שדואגת למלא את המערכים A,B,C במספרים רנדומלים בין 0,1023. לאחר מכן מתבצעת קריאה לשגרה הדרושה במטלה kSmallest המקבלת מערך ומספר טבעי k, אשר מדפיסה למסך רשימה של k האיברים הקטנים ביותר במערך בסדר עולה.

עבור כל מערך A,B,C, נבחר k=10,15,100 כפי שנדרש במטלה.

* **public static void fillArray(int [] array):**

הוכחת נכונות: בשגרה נעשה שימוש בספרייה חיצונית אשר מיועדת ליצירת מספרים אקראיים (כפי שמוגדר במטלה).

השגרה יוצרת משתנה בשם rand שיכיל את המספר הרנדומלי.

לאחר מכן השגרה נכנסת ללולאה על אורך המערך. בתוך הלולאה השגרה מכניסה למשתנה rand מספר רנדומלי בין 0 ל-1023, כפי שהוגדר בשאלה בעזרת פונקצית Math.random(), ושמה בarray[i] את הערך בrand. כך ממשיכה הלולאה למלא את איברי המערך במספרים רנדומלים, ויוצאת מהלולאה כאשר הגענו לסוף המערך. ביציאה מהלולאה המערך array שהיה ריק בהתחלה, מכיל מספרים טבעיים בין 0 ל1023, כנדרש.

סיבוכיות זמן ריצה: מכיוון שיש n איטרציות של הלולאה (כגודל המערך), סיבוכיות זמן הריצה הוא O(n).

* **public static void kSmallest(int [] array, int k):**

הוכחת נכונות: תחילה, השגרה מייצרת שלוש נקודות, n1,n2,n3 אשר מחושבות על פי ההנחייה במטלה. לאחר מכן נוצר עץ אדום-שחור חדש rbt, אשר מקבל את הערך k שהוכנס בקריאה לשגרה.

שורה הבאה השגרה מבצעת לולאה על גודל המערך, כאשר i מייצג את האינדקס המצביע לאיבר הנוכחי במערך. בתוך הלולאה נעשית בדיקה האם הגענו לאחת מהנקודות המבוקשות (האם i מצביע על n1, n2 או על n3). במידה וכן, על-פי תכנון האלגוריתם שרשום במטלה בעמוד 14 בחוברת המטלות, יש להדפיס את המצב הנוכחי של העץ, שתפקידו להחזיק את k האיברים הקטנים במערך array שהוכנס בקריאה לשגרה. לכן נקראית השגרה הציבורית printkMin(), שהראינו כי היא מדפיסה את איברי העץ בסדר עולה. למען הנוכחות, בחרנו להדפיס שורה חדשה למסך בכל פעולת הדפסה כזאת, כך שיהיה למשתמש קל יותר לראות כל מצב בנפרד.

לאחר מכן, עדיין בתוך הלולאה יש קריאה לשגרה Insert(array[i]), שהראינו כי היא מקבלת מפתח ומכניסה אותו לעץ אדום-שחור. הקריאה הנ"ל מכניסה את הערך שנמצא בarray[i] לתוך העץ.

במידה והגענו לאחת מנקודות הבדיקה ובמידה ולא, שורת ההכנסה מתבצעת בכל אופן ומטפלת במצב האם העץ מכיל k איברים כפי שהראינו קודם לכן בהוכחת הנכונות של השגרה Insert.

סיבוכיות זמן ריצה: פעולות השמה פשוטות ומשפטי תנאי (if else) לוקחות זמן קבוע של O(1). מהאמור לעיל, השגרה printkMin() מתבצעת בזמן ריצה של O(k).

**סיכום**